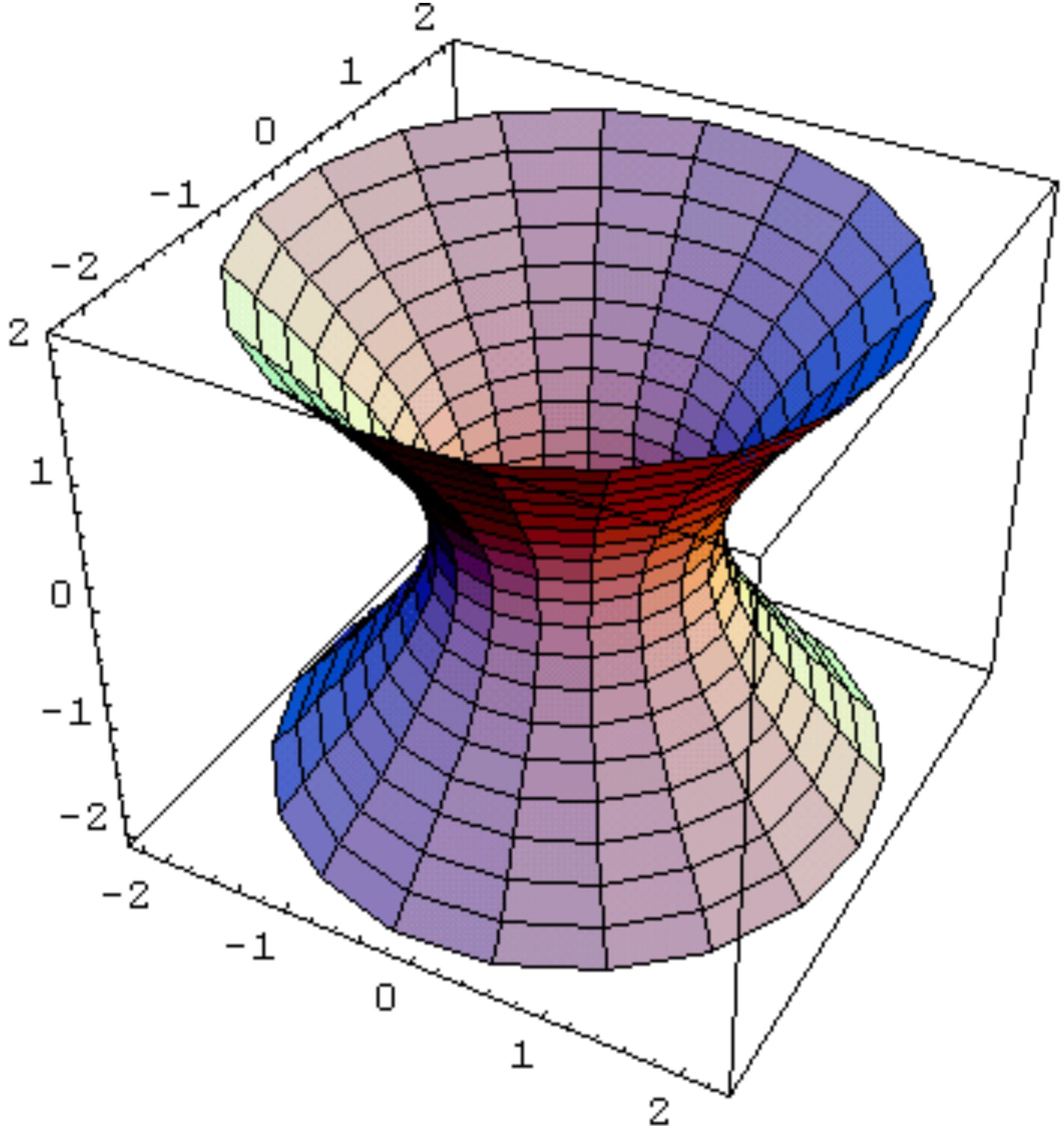
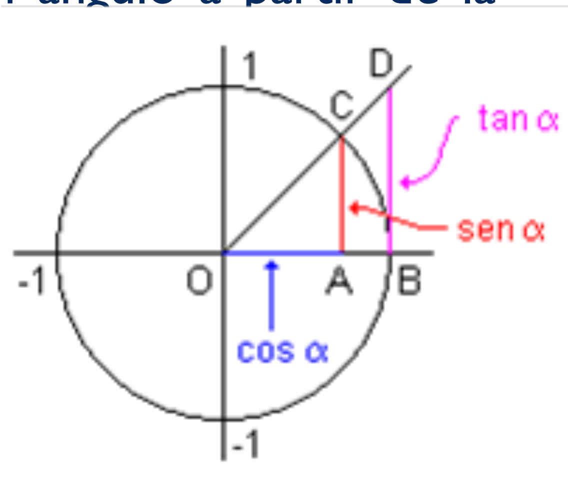
TEMA 0.- HERRAMIENTAS MATEMÁTICAS.



0.1.- Trigonometría.

- Definimos las **razones trigonométricas** de un ángulo a partir de la **circunferencia unidad**, como:

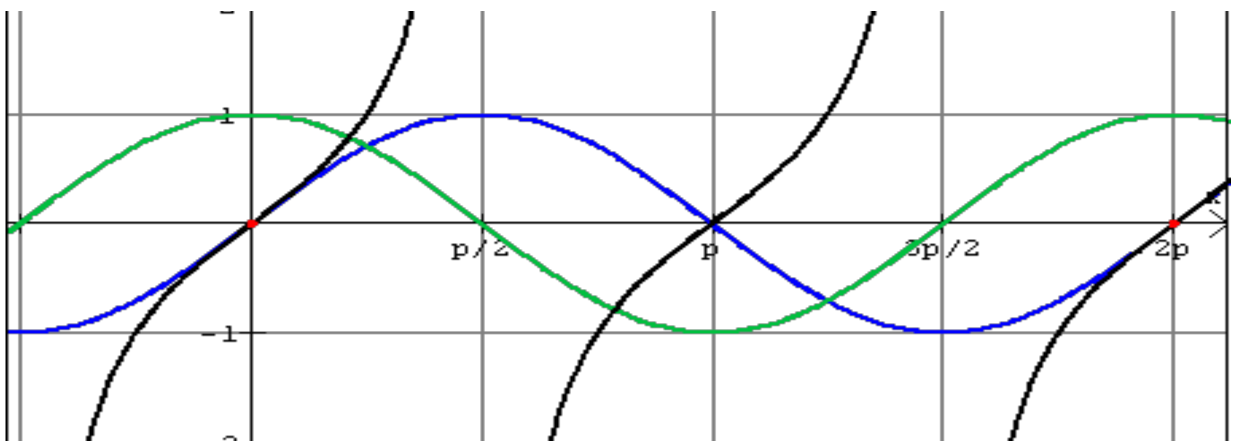
$$\boxed{sen\alpha = \frac{AC}{OC}} \quad \boxed{\cos\alpha = \frac{OA}{OC}} \quad \boxed{tg\alpha = \frac{sen\alpha}{\cos\alpha} = \frac{AC}{OA}}$$



- El teorema fundamental de la trigonometría:

$$\boxed{sen^2\alpha + \cos^2\alpha = 1}$$

- Funciones de onda armónicas:



- **El radián (rad):** unidad del sistema internacional para medir los ángulos planos.

$$\boxed{1 vuelta \leftrightarrow 360^{o} \leftrightarrow 2\pi\, rad}$$

- Transformación de sumas de razones trigonométricas en productos:

$$\operatorname{sen} A + \operatorname{sen} B = 2 \operatorname{sen} \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}$$

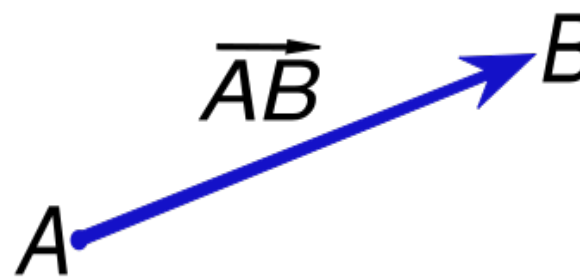
$$\operatorname{sen} A - \operatorname{sen} B = 2 \cos \frac{A+B}{2} \operatorname{sen} \frac{A-B}{2}$$

$$\cos A + \cos B = 2 \cos \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}$$

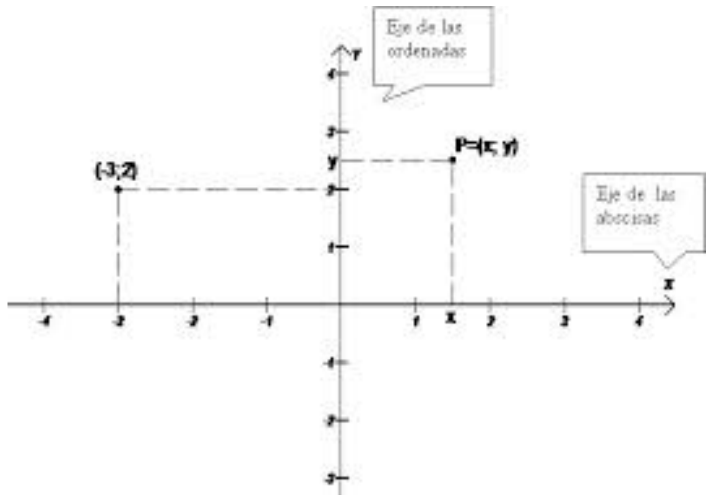
$$\cos A - \cos B = -2 \operatorname{sen} \frac{A+B}{2} \operatorname{sen} \frac{A-B}{2}$$

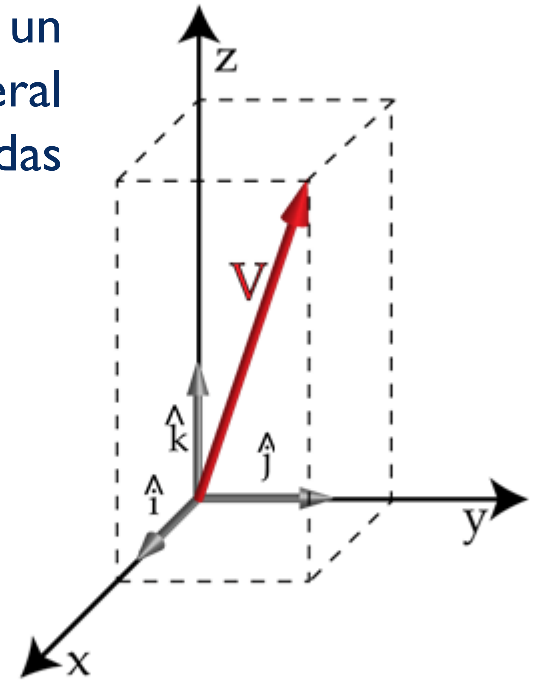
0.2.- Cálculo vectorial.

- Definimos el vector $\overrightarrow{AB}$ como el segmento orientado con origen en A y final en B caracterizado por:
  - Módulo: longitud del segmento |AB|.
  - Dirección: de la recta que lo contiene.
  - Sentido: de A a B.



- Para poder trabajar en Física necesitamos un <u>Sistema de referencia</u>. Con carácter general consideraremos un sistema de coordenadas cartesiano:





- Cada una de las tres dimensiones del espacio se caracterizan por tres vectores unitarios $\hat{i}$, $\hat{j}$ y $\hat{k}$ que constituyen una base ortonormal.

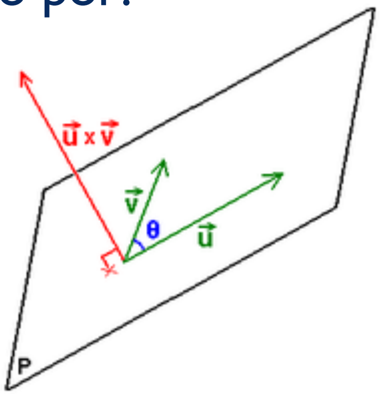
- <u>Componentes de un vector</u> en el espacio y su <u>módulo</u>:

$$\boxed{\vec{u} = (u_x, u_y, u_z) = u_x\hat{i} + u_y\hat{j} + u_z\hat{k}} \rightarrow \boxed{|\vec{u}| = \sqrt{u_x^2 + u_y^2 + u_z^2}}$$

$$\boxed{\vec{v} = (v_x, v_y, v_z) = v_x\hat{i} + v_y\hat{j} + v_z\hat{k}} \rightarrow \boxed{|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}}$$

Operaciones con vectores:

- **Suma / Resta:** $$\vec{u}+\vec{v}=(u_x+v_x)\hat{i}+(u_y+v_y)\hat{j}+(u_z+v_z)\hat{k}$$
- **Producto por un escalar:** $$k\cdot\vec{u}=k\cdot u_x\hat{i}+k\cdot u_y\hat{j}+k\cdot u_z\hat{k}$$
- **Producto escalar:** $$\vec{u}\cdot\vec{v}=(u_x\cdot v_x)+(u_y\cdot v_y)+(u_z\cdot v_z)$$
- Producto vectorial $\vec{u}\times\vec{v}$: es una aplicación en la que a partir de dos vectores obtenemos un tercer vector caracterizado por:
  - Módulo: $|\vec{u}\times\vec{v}| = |u|\cdot|v|\cdot \mathrm{sen}\Theta$
  - Dirección: perpendicular a $\vec{u}$ y $\vec{v}$.
  - Sentido: regla del sacacarchos.
  - Componentes del producto vectorial:



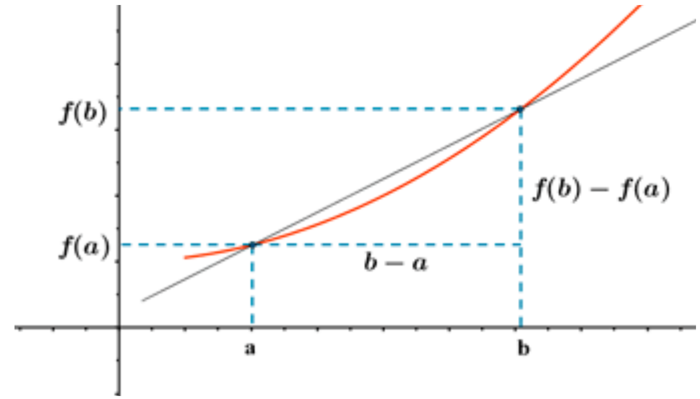
$$\vec{u}x\vec{v}=(u_yv_z-u_zv_y)\hat{i}+(u_xv_z-u_zv_x)\hat{j}+(u_xv_y-u_yv_x)\hat{k}$$

$$\mathbf{w}=\mathbf{u}\times\mathbf{v}=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ u_x & u_y & u_z\\ v_x & v_y & v_z\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}u_y & u_z\\ v_y & v_z\end{vmatrix}\cdot\mathbf{i}-\begin{vmatrix}u_x & u_z\\ v_x & v_z\end{vmatrix}\cdot\mathbf{j}+\begin{vmatrix}u_x & u_y\\ v_x & v_y\end{vmatrix}\cdot\mathbf{k}$$

0.3.- Cálculo diferencial.

- Definimos la **Tasa de Variación Media** de una función como:

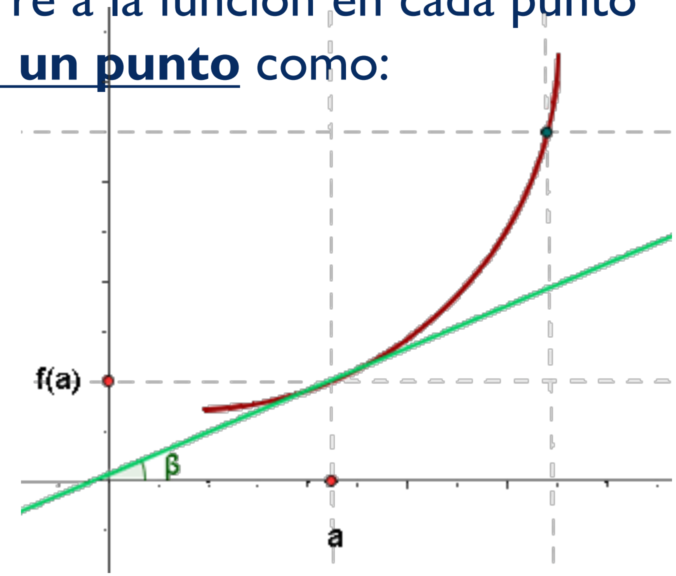
$$\boxed{TVM[a,b] = \frac{f(b)-f(a)}{(b-a)}}$$



  - Proporciona información sobre el incremento medio de una función.

- Para tener información sobre qué le ocurre a la función en cada punto definimos la **derivada de la función en un punto** como:

$$\boxed{f'(a) = \lim_{b \to a} \frac{f(b)-f(a)}{(b-a)}}$$



  - Proporciona información sobre el incremento de una función en un punto.

Derivadas de funciones elementales:

Función	Derivada
$f(x) = K$	$f'(x) = 0$
$f(x) = x^{n}$	$f'(x) = n \cdot x^{n-1}$
$f(x) = e^{x}$	$f'(x) = e^{x}$
$f(x) = \mathrm{Ln}x$	$f'(x) = 1/x$
$f(x) = \mathrm{sen}\ x$	$f'(x) = \cos x$
$f(x) = \cos x$	$f'(x) = -\mathrm{sen}\ x$

Operaciones con derivadas:

Operación:	Expresión:
Derivada de la suma:	$(f(x)+g(x))' = f'(x)+g'(x)$
Derivada del producto:	$(f(x)\cdot g(x))' = f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$
Derivada del cociente:	$\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g(x)^2}$
Derivada de la composición:	$f[g(x)]' = f'[g(x)]\cdot g'(x)$ (regla de la cadena)